# Herramientas para abordar el método axiomático estilo Hilbert.

Mauro Francisco Curto

Abstract: El método axiomático estilo Hilbert es reconocido por la mayoría de los lógicos como un cálculo de gran dificultad, de aquí que uno de los primeros objetivos que se plantean es dar una prueba del teorema de la deducción para facilitar las derivaciones consecuentes, sin embargo, esto modifica la estructura de las derivaciones naturalizándolas. En el presente trabajo se brindarán definiciones de "axioma" y "corolario" con el fin de simplificar las derivaciones y aprehender el funcionamiento del cálculo sin modificar la estructura de la prueba.

Palabras clave: Método axiomático - Esquema - Axioma – Corolario – Teoría de la prueba

Abstract: The Hilbert-style axiomatic method is recognized by most logicians as a calculus of great difficulty, hence one of the first objectives is to provide a proof of the deduction theorem to facilitate consequent derivations, however , this modifies the structure of the derivations, naturalizing them. In this work, definitions of "axiom" and "corollary" will be provided in order to simplify the derivations and understand how the calculus works without modifying the structure of the proof.

Keywords: Axiomatic method - Scheme - Axiom - Corollary - Proof theory

## Introducción

El método axiomático estilo Hilbert[1] adquiere gran popularidad alrededor del 1900 dentro del "programa de Hilbert" como el cálculo mediante el cual se formalizaban las pruebas matemáticas, la idea básica es partir de un conjunto (el más pequeño posible) de

[1] En lo que resta del trabajo se omitirá “estilo Hilbert” cuando hagamos referencia al método axiomatico.

axiomas tautológicos a partir de los cuales se derivan teoremas utilizando como única regla el *modus ponens* (MP). Teniendo como objetivo probar la consistencia de las pruebas lógicas y analizar las pruebas matemáticas tal como ocurren en la práctica (como parte del programa de Hilbert) Gentze desarrolla la deducción natural alrededor de 1930. El primero es un cálculo en el cual disponemos de varios axiomas y de una sola regla para derivar teoremas mientras que el segundo es un cálculo en el cual no tenemos axiomas sino más bien un conjunto de reglas de introducción y eliminación de conectivas junto con la posibilidad de trabajar bajo supuestos. Teniendo en cuenta el objetivo de Gentze de analizar las pruebas matemáticas tal como ocurren en la práctica Jan von Plato escribe:

> La primera observación es que las pruebas reales no se basan en axiomas expresados en un lenguaje lógico, como en la teoría de la prueba axiomática de Hilbert. La característica más típica es, en cambio, que los teoremas hacen sus afirmaciones bajo algunos supuestos. Las suposiciones se analizan en partes y la conclusión también se analiza en partes hasta que estos dos análisis se encuentran y se puede sintetizar una prueba. (Plato, 2008, spa)

Así, la deducción natural surgía como un cálculo que representa de manera más fiel el proceder en el razonamiento matemático tal cual se da en la práctica y tiene otra virtud: las pruebas son mucho más sencillas e intuitivas.

El método axiomático es reconocido por muchos lógicos como un cálculo de gran dificultad cuyas derivaciones de teoremas son extremadamente difíciles de hallar: Łukasiewicz (1957) reconoce que hay que ser un experto para derivar teoremas sencillos a partir de los axiomas que él propone en su cálculo; Von Plato (2013) también reconoce que las pruebas son notoriamente difíciles de hallar y que teoremas simples tienen pruebas complicadas. Muchos autores, al presentar el método axiomático, se plantean como primer objetivo la demostración del teorema de la deducción, dicho teorema facilita de gran manera las consecuentes derivaciones de teoremas, pero modifica la estructura original de las derivaciones y las "naturaliza", es decir, modifica la prueba del método axiomático y lo asemeja a una deducción natural. Una de las razones de esto se da en virtud de que el estudio de las pruebas del método axiomático no es el objetivo principal, sino que se utiliza como herramienta metateórica, como, por ejemplo, al utilizarlo para probar la corrección y completitud de la lógica de primer orden, y en este sentido lo que interesa es la economía y la simpleza de las pruebas.

En el presenta trabajo se brindarán definiciones[2] de dos nociones fundamentales (axioma y corolario) utilizando la definición de esquema brindada por Corcorán para lograr comprender y dominar la estructura de la prueba del método axiomático. Mi interés radica en la teoría de la prueba del cálculo y en este sentido el teorema de la deducción no será tenido en cuenta dado que modifica la estructura prueba de tal manera que podríamos considerar que nos encontramos frente a un cálculo completamente distinto.

Utilizaremos la definición de esquema brindada por Corcorán y Samawi: estos autores definen a un esquema como un sistema complejo que consta de 1: “una cadena sintáctica compuesta de palabras significativas y/o símbolos y también de guardadores de lugar…” y 2: “una condición secundaria que especifica cómo se deben llenar los guardadores de lugares para obtener instancias y también, a veces, como se deben entender las palabras o símbolos significativos” (Corcorán y Samawi, 2004, sp).

## 1) Breve Introducción al cálculo

El cálculo axiomático estilo Hilbert consta de: por un lado, un conjunto de axiomas (susceptibles de ser instanciados por formas de enunciado bien formadas para generar instancias), y por el otro lado, de la regla $A \to B, A \vdash B$ (*modus ponens*) para operar con los axiomas. El conjunto de axiomas desde los cuales partir puede variar, en este trabajo utilizaremos los propuestos por Mendelson (2015):

1) $A \to (B \to A)$
2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

[2] Estas definiciones deben tomarse como recursos didácticos y en este sentido son definiciones de trabajo únicamente empleables en el cálculo axiomático presentado en este trabajo.

Para instanciar adecuadamente un axioma se debe reemplazar cada letra (en todas sus apariciones en el axioma) por una forma de enunciado bien formada cualquiera. De la forma de enunciado resultante diremos que es una "instancia" del axioma en cuestión. Por ejemplo, tomemos el axioma 1) A→(B→A) y las formas de enunciado (B→C) y D: la forma de enunciado (B→C)→(D→ (B→C)) resulta del reemplazo de A/(B→C) y B/D en el axioma 1, y decimos que es una "instancia" del mismo.

Para derivar correctamente teoremas utilizamos la regla A→B, A ⊢ B (*modus ponens*) además de los axiomas adecuadamente instanciados. Veamos el ejemplo de la derivación del teorema A→A "ley de identidad":

1. (A→((A→A)→A))→((A→(A→A))→(A→A)) – Instancia del axioma 2 donde A/A, B/A→A y C/A
2. A→((A→A)→A) - Instancia del axioma 1 donde A/A y B/A→A
3. (A→(A→A))→(A→A) – *modus ponens* en 1-2
4. A→(A→A) - Instancia del axioma 1 donde A/A y B/A
5. A→A – *modus ponens* en 3-4

# 2) Axioma

<u>2.1 Definición de axioma</u>

**Definición 1 Axioma**[3]**:** Un axioma es un **esquema** compuesto por letras de enunciado $A_1$, $A_2$… $A_n$, por signos auxiliares [(y)] y por conectivas proposicionales, que genera instancias de sí mismo mediante la instanciación de las letras de enunciados por formas de enunciados cualesquiera de la lógica proposicional.

Ateniendo a la definición de Corcorán tenemos que: 1) la cadena sintáctica del esquema está compuesta por de letras de enunciados (guardadores de lugares), signos auxiliares y conectivas proposicionales, y 2) la condición secundaria establece que: los guardadores

[3] Esta definición también es válida para la de teorema, la diferencia entre un axioma y un teorema radica en que el primero se asume como punto de partida mientras que el segundo se deriva.


ISSN 2250-4494 – web: http://jornadasfilo.fahce.unlp.edu.ar

de lugar han de ser instanciados con formas de enunciado bien formadas de la lógica proposicional. Podemos entender a un esquema, de manera más simple, como una "estructura vacía" donde el sustantivo "estructura" hace referencia al conjunto símbolos significativos y el adjetivo "vacío" hace alusión a la susceptibilidad de la estructura de ser completada.

## 2.2 Regla de instanciación

Considere el siguiente esquema: $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ denominado "carga de premisas" o *ley a fortiori*. Tómese las formas de enunciado A→B y C y reempláceselas por las letras de enunciado $A_1$ y $A_2$ respectivamente en el esquema dado. La forma de enunciado obtenida por ese reemplazo será: (A→B)→(C→(A→B)), esta forma de enunciado se dice que es una **instancia** del esquema $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$. Así, la regla de instanciación permite obtener formas de enunciado mediante instanciación de los guardadores de lugar de un esquema por formas de enunciados cualesquiera. La proposición 1.3 de Mendelson esboza el funcionamiento de la regla de instanciación para los esquemas y establece la propiedad de los esquemas tautológicos de transmitir tautologicidad a toda instancia bien realizada de sí mismos:

> Si X es una tautología que contiene las letras de enunciado $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, y & surge de X sustituyendo las formas de enunciado F1, F2, …, Fn, por $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, respectivamente, entonces & es una tautología; entonces, la sustitución en una tautología produce otra tautología. (Mendelson, 2015, p.10)

En virtud de la proposición 1.3 si adoptamos como axiomas esquemas tautológicos nos aseguramos la corrección de la regla de instanciación, esto es, no podremos obtener formas de enunciado contingentes ni contradictorias.

Los esquemas en los que estamos interesados son aquellos que poseen la propiedad de ser **tautológicos**. Para determinar si un esquema es tautológico basta con aplicar las tablas de verdad, en el presente trabajo esto será omitido y se dejará al lector la tarea de corroborar la tautologicidad de los esquemas.

## 2.3 Susceptibilidad de instanciación


ISSN 2250-4494 – web: http://jornadasfilo.fahce.unlp.edu.ar

Tomemos el esquema $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ y la forma de enunciado $\neg(A \rightarrow B)$. El antecedente del esquema es $A_1$ y podemos instanciarlo con la forma de enunciado propuesta, de esta manera decimos que $\neg(A \rightarrow B)$ es susceptible de ser instanciado en $A_1$[4]. Ahora bien, el consecuente del esquema es $(A_2 \rightarrow A_1)$ y no es posible instanciar a $A_2$ y A1 de tal manera que se obtenga la forma de enunciado $\neg(A \rightarrow B)$, en este sentido decimos que $\neg(A \rightarrow B)$ no es susceptible de ser instanciado en $(A_2 \rightarrow A_1)$.

Veamos otro ejemplo partiendo de los axiomas $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3)) \rightarrow ((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_3))$ denominado "transitividad" y $((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow A_1) \rightarrow A_1$ denominado "Ley de Peirce". Una estrategia para proceder en las derivaciones sería instanciar el axioma "transitividad" de tal manera que en el antecedente $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3)$ resulte una instancia de la "Ley de Peirce" para poder aplicar Modus Ponens. Sin embargo, esto no es posible porque el esquema de la "Ley de Peirce" no es susceptible de ser instanciado en dicho antecedente. Ahora bien, nótese que cualquier instancia del esquema $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ es susceptible de ser instanciada en el antecedente de "transitividad".

2.4 Método ilustrativo para presentar los axiomas

El esquema: $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ puede escribirse, a modo ilustrativo, de la siguiente manera: $\quad^{1} \rightarrow (\quad^{2} \rightarrow \quad^{1})$. Se deben respetar las siguientes pautas:

1) La instanciación realizada en un superíndice$^{x}$ debe realizarse en todas las apariciones de dicho superíndice.

2) Las fórmulas instanciadas deben representarse con un color distinto al del esquema del axioma.

[4] Nótese que A1 constituye el esquema atómico y por ende la totalidad de las formas de enunciado pueden ser instanciadas en dicho esquema.


ISSN 2250-4494 – web: http://jornadasfilo.fahce.unlp.edu.ar

Tomando el sistema de axiomas propuesto por Mendelson (2015)[5]:

1) A→(B→A)

2) (A→(B→C))→((A→B)→(A→C))

3) (¬B→¬A)→((¬B→A)→B)

Podemos reescribirlos como:

1) $\ ^{1}\to(\ \ ^{2}\to\ \ ^{1})$.

2) $(\ \ ^{1}\to(\ \ ^{2}\to\ \ ^{3}))\to((\ \ ^{1}\to\ \ ^{2})\to(\ \ ^{1}\to\ \ ^{3}))$

3) $(\neg\ \ ^{1}\to\neg\ \ ^{2})\to((\neg\ \ ^{1}\to\ \ ^{2})\to\ \ ^{1})$

**Ejemplo 1** de instanciaciones:

A1: $(\neg A\to B)^{1}\to(((C\to B)\to A)^{2}\to(\neg A\to B)^{1})$. donde$^{1}$: $\neg A\to B$, $^{2}$: $(C\to B)\to A$

A2: $(B^{1}\to((B\to C)^{2}\to(A\to C)^{3}))\to((B^{1}\to(B\to C)^{2})\to(B^{1}\to(A\to C)^{3}))$

donde$^{1}$: B, $^{2}$: B→C, $^{3}$: A→C.

A3: $(\neg\neg C^{1}\to\neg(B\to A)^{2})\to((\neg\neg C^{1}\to(B\to A)^{2})\to\neg C^{1})$ donde $^{1}$: ¬C, $^{2}$: B→A.

De esta manera podemos apreciar de forma clara la distinción entre la estructura del esquema y las formas de enunciado instanciadas. Como se pretende que esta manera alternativa para escribir los axiomas sea solamente ilustrativa y didáctica, en lo que sigue del texto se utilizará la manera tradicional de escribirlos.

**Ejercicio 1**: Determine a cuál de los axiomas propuestos por Mendelson (2015) pertenecen las siguientes instancias de esquemas y cuáles son las formas de enunciados que han sido instanciadas en los guardadores de lugares:

1- (¬A→C)→((¬A→(B→C))→(¬A→C))

2- (¬(A→C)→(B→(A→B)))→((¬(A→C)→B)→(¬(A→C)→(A→B)))

3- (¬B→¬A)→((¬B→A)→(¬B→¬A))

4- (¬(A→C)→¬B)→((¬(A→C)→B)→(A→C))

5- (¬B→(A→C))→((¬B→A)→(¬B→(A→C)))

6- (¬C→((B→C)→C))→((¬C→(B→C))→(¬C→C))

**Ejercicio 2**: Determine si las siguientes formas de enunciado son susceptibles de ser instanciadas en el esquema $A_1\to(A_2\to A_3)$:

[5] Generalmente los axiomas no son presentados empleando guardadores de lugar, sino con formas de enunciados.

Ensenada, Provincia de Buenos Aires, 7 a 10 de agosto de 2023
ISSN 2250-4494 – web: http://jornadasfilo.fahce.unlp.edu.ar

1. (¬A→A)→A
2. ((A→(B→C))→((B→(A→C))
3. ¬A→(A→B)
4. A→¬(B→C)

# 3) Corolario

## 3.1 Manera típica de proceder

Dado que nuestra única regla para derivar teoremas es el Modus Ponens resulta intuitivo intentar instanciar a los esquemas de tal manera que su antecedente sea la instancia de un axioma o teorema ya derivado y que el consecuente (o el último consecuente) sea la formula deseada. Esta es la manera en la que debemos proceder en un principio, pero a medida que avancemos notaremos que la complejidad de las derivaciones aumenta y también que las instanciaciones de los esquemas se tornan extensas. Otra cosa que vamos a notar en esta manera de proceder en las derivaciones es que se dan ciertas regularidades en el sentido de que al instanciar formas de enunciado con cierto tipo de estructuras en el antecedente de un axioma y luego aplicar Modus Ponens obtendremos otras formas de enunciado con cierto tipo de estructura siempre de la misma manera.

## 3.2 Derivación esquemática

Una derivación esquemática es el esquema de una derivación cuya cadena sintáctica de símbolos significativos está constituida por los siguientes elementos:

1. (Al menos) un esquema principal cuya conectiva principal sea un condicional.
2. (Al menos) una forma de enunciado susceptible de ser instanciada en el antecedente (los antecedentes) del esquema principal.
3. Una serie de instanciaciones y aplicaciones de MP recurrentes.

Todo esquema cuya conectiva principal sea un condicional esboza (al menos) una derivación esquemática que permite modificar la estructura de una forma de enunciado dada por otra. La manera de proceder se da instanciando el antecedente del esquema principal de tal manera que resulte una forma de enunciado ya derivada para luego obtener el consecuente mediante la aplicación de MP.

Tomemos como ejemplo el esquema $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$: Al instanciar en $A_1$ una forma de enunciado ya derivada siempre será posible aplicar MP y obtener el consecuente $A_2 \rightarrow A_1$, donde $A_1$ es la forma de enunciado instanciada y $A_2$[6] puede ser cualquier forma de enunciado que deseemos instanciar. Podemos apreciar de manera visual como $A_1$ ha sido "transformada" en $A_2 \rightarrow A_1$ luego de una serie de instanciaciones y aplicaciones de MP, esta modificación parece haber "cargado" el antecedente A2 en A1. Es en este sentido (desde el punto de vista del método axiomático estilo Hilbert) en que entendemos al esquema $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ como "carga de premisas".

La serie de instanciaciones y aplicaciones de MP para el esquema de esta derivación sería el siguiente:

1. $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ – Se introduce el esquema principal instanciado de tal manera que el antecedente sea una forma de enunciado ya derivada.
2. $A_1$ – Introducimos la forma de enunciado ya derivada
3. $(A_2 \rightarrow A_1)$ – Aplicamos MP en 1,2

El esquema de esta derivación vale para cualesquiera sean las formas de enunciado que deseemos instanciar en $A_1$ y $A_2$. Veamos un ejemplo en el cual el esquema principal sea $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ y la forma de enunciado $A_1$ (susceptible de ser instanciada en el antecedente del esquema principal) sea $A \rightarrow A$ (ley de identidad), y $A_2$ sea C:

1) $(A \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow A))$ – Axioma/esquema $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ donde $A_1/(A \rightarrow A)$ y $A_2/C$.
2) $(A \rightarrow A)$ - Teorema "Ley de identidad"
3) $C \rightarrow (A \rightarrow A)$ - MP en 1,2

[6] Nótese que es posible instanciar en A2 cualquier forma de enunciado deseada y aún así será posible aplicar MP para obtener el consecuente.

En el paso 1 de la derivación se ha instanciado el esquema principal $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ de tal manera que el antecedente resulte ser la “ley de identidad”, en el paso 2 se ha introducido la “ley de identidad” en la derivación y en el paso 3 se ha obtenido el consecuente $C \rightarrow (A \rightarrow A)$ por aplicación de MP.

3.3 Definición de Corolario

**Definición 2 Corolario:** Un corolario es la omisión de la serie de instanciaciones y aplicaciones de MP recurrentes de una derivación esquemática una vez derivados los elementos restantes.

Esta definición debe entenderse, por un lado, como una manera de reducir la longitud de las derivaciones y, por otro lado, como una herramienta para planificar estrategias para derivar las formas de enunciado deseadas. Veamos un ejemplo en el cual nuestro esquema principal sea $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow ((A_2 \rightarrow A_3) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_3))$ denominado “ley de transitividad” o “corte”, una de las derivaciones esquemáticas que este esquema esboza es: $A_1 \rightarrow A_2,\ A_2 \rightarrow A_3 \vdash A_1 \rightarrow A_3$ siendo esta la razón de su nombre y la que más nos interesa. El esquema de la derivación es el siguiente:

1 . $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow ((A_2 \rightarrow A_3) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_3))$ – Introducimos el esquema principal instanciado de tal manera que el esquema $A_1 \rightarrow A_3$ sea la forma de enunciado deseada.
2 . $(A_1 \rightarrow A_2)$ - forma de enunciado ya derivada.
3 . $(A_2 \rightarrow A_3)$ – forma de enunciado ya derivada.
4 . $(A_2 \rightarrow A_3) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_3)$ – MP 1,2
5 . $(A_1 \rightarrow A_3)$ – MP 3,4

Esta derivación esquemática tiene como conclusión el esquema $A_1 \rightarrow A_3$ del esquema principal, de modo que nuestra estrategia será instanciar $A_1 \rightarrow A_3$ de tal manera que forme la formula deseada y luego intentaremos derivar los 2 antecedentes que restan. El corolario de este esquema principal nos permite obviar los pasos 1 y 4 de la derivación esquemática anterior, de manera que solo con los pasos 2 y 3 nos es posible derivar 5.

1. $(A_1 \rightarrow A_2)$ - forma de enunciado ya derivada


ISSN 2250-4494 – web: http://jornadasfilo.fahce.unlp.edu.ar

2. $(A_2 \rightarrow A_3)$ – forma de enunciado ya derivada
3. $(A_1 \rightarrow A_3)$ – Corolario esquema $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow ((A_2 \rightarrow A_3) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_3))$ en 1 y 2

3.4 La construcción del corolario

Todo esquema cuya conectiva principal sea un condicional esboza al menos una derivación esquemática que podrá ser utilizada como corolario, pero no toda derivación esquemática nos es de utilidad para aplicar en las derivaciones axiomáticas. Tomemos como ejemplo a la "ley de identidad" $A_1 \rightarrow A_1$, a partir de este esquema podemos obtener el corolario $A_1 \vdash A_1$ el cual no presenta utilidad alguna para el cálculo axiomático dado que al aplicarlo obtenemos exactamente la misma forma de enunciado que instanciamos en el antecedente. Algo análogo sucede con uno de los corolarios de $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$, el corolario $A_1, A_2 \vdash A_1$ no nos brinda nada nuevo, de manera que todo corolario que tenga como premisa la misma forma de enunciado que se obtiene luego de aplicarlo no es útil.

Algunos corolarios son más útiles que otros, por ejemplo: el corolario del esquema $(A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow ((A_2 \rightarrow A_3) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_3))$ el cual sería $A_1 \rightarrow A_2, A_2 \rightarrow A_3 \vdash A_1 \rightarrow A_3$. A partir de este corolario podemos plantear una clara estrategia para derivar teoremas, a saber, si tenemos como objetivo la forma de enunciado $A \rightarrow B$ podemos intentar derivar las fórmulas $A \rightarrow X$ y $X \rightarrow B$ para luego aplicar el corolario del esquema mencionado y así obtener nuestra forma de enunciado deseada. Partiendo del mismo esquema podemos utilizar también el corolario $A_1 \rightarrow A_2 \vdash (A_2 \rightarrow A_3) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_3)$ el cual no nos brinda una clara estrategia para obtener formas de enunciado deseada, lo que si nos permite es modificar el esquema de formas de enunciado ya derivadas y queda a nuestro criterio determinar si eso es lo que necesitamos para continuar la derivación.

Algunos corolarios son compuestos, es decir, tienen al menos dos esquemas principales que utilizan. Tomemos como ejemplo el corolario que propone Mendelson $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3), A_2 \vdash A_1 \rightarrow A_3$. Este corolario utiliza el esquema $(A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_3)) \rightarrow ((A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow (A_1 \rightarrow A_3))$ y supone también el corolario del esquema $A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow A_1)$ dado que es necesario "cargar la premisa" $A_1$ a nuestra premisa $A_2$ para poder aplicar MP y descargar el objetivo $A_1 \rightarrow A_3$.

La decisión de construir un corolario a partir de un/os esquema es arbitraria, depende de nosotros identificar cual es la manera más simple y practica de proceder en las derivaciones dados un determinado conjunto de axiomas. Habíamos definido al corolario como una "omisión" de pasos, es decir, podemos reconstruir los pasos omitidos y en definitiva considerar que nunca se ha aplicado, ciertamente este es uno de los beneficios que nos brinda, pero el corolario es algo más que una herramienta de síntesis, es el concepto que nos permite comprender el funcionamiento de los esquemas y que nos permite planificar estrategias para derivas las formas de enunciado deseadas. En definitiva, es aquello que nos permite aprehender el proceder de las derivaciones del cálculo axiomático.

**Ejercicio 3**: El Corolario 1.10 (Mendelson 2015) establece:

a) $A \rightarrow B , B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$
b) $A \rightarrow ( B \rightarrow C ) , B \vdash A \rightarrow C$

3.1 ¿Cuál es el axioma/esquema principal de cada corolario? (Pueden ser varios)
3.2 Reconstruya las derivaciones esquemáticas de cada corolario (teniendo en cuenta lo respondido en la pregunta anterior).

**Ejercicio 4**: Siguiendo el texto de Mendelson (2015) reconstruya las instanciaciones de los axiomas/teoremas y aplicaciones de MP en los pasos 3 y 5 de la derivación del Lema 1.11(a) que han sido omitidas en virtud de los corolarios. Se transcribe la derivación del teorema a. ($\neg\neg A \rightarrow A$):

1- $( \neg A \rightarrow \neg\neg A ) \rightarrow (( \neg A \rightarrow \neg A ) \rightarrow A )$ - Axioma 3 donde B/A, A/¬A
2- $\neg A \rightarrow \neg A$ - Lema 1.8 (es una instancia de la “ley de identidad”)
3- $( \neg A \rightarrow \neg\neg A ) \rightarrow A$ - Corolario 1.10(b) en 1 y 2
4- $\neg\neg A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg A )$ - Axioma 1 donde A/¬¬A , B/¬A
5- $\neg\neg A \rightarrow A$ - Corolario 1.10(a) en 3 y 4

# Conclusión

Las definiciones de axioma y corolario permiten comprender de una manera clara el proceder de las derivaciones en el método axiomático, cálculo reconocido por lógicos de gran renombre como uno de gran dificultad. Parte de esta gran dificultad está dada por el hecho de que solamente se dispone de una regla y de un conjunto de axiomas mínimo, y la manera de proceder en las derivaciones es débilmente insinuada, a diferencia de la deducción natural en la cual el amplio conjunto de reglas nos insinúa de manera más clara como proceder en la derivación. Podemos entender a los corolarios como "reglas" y en este sentido la clave para dominar el método axiomático consiste en construir nuestras propias reglas, juzgando cuáles nos son de verdadera utilidad y cuáles no lo son.

## Soluciones a ejercicios

**Ejercicio 1:**

1- Axioma 1 donde A: $(\neg A \to C)$, B: $\neg A \to (B \to C)$.

2- Axioma 2 donde A: $\neg(A \to C)$, B: B, C: $(A \to B)$

3- Axioma 1 donde A: $\neg B \to \neg A$, B: $\neg B \to A$.

4- Axioma 3 donde A: $\neg(A \to C)$, B: B.

5- Axioma 1 donde A: $\neg B \to (A \to C)$, B: $\neg B \to A$.

6- Axioma 2 donde A: $\neg C$, B: $B \to C$, C: C.

**Ejercicio 2:** 1) no, 2) si, 3) si, 4) no.

**Ejercicio 3:** 3.1 - Ambos corolarios tienen como esquemas principales los axiomas 1 y 2.

3.2 -

Derivación esquemática corolario a):

1. $(A_1\to(A_2\to A_3))\to((A_1\to A_2)\to(A_1\to A_3))$ – Instancia del Axioma 2.
2. $A_1\to A_2$ – Forma de enunciado ya derivada.
3. $A_2\to A_3$ – Forma de enunciado ya derivada.
4. $(A_2\to A_3)\to(A_1\to(A_2\to A_3))$ – Instancia del Axioma 1.
5. $(A_1\to(A_2\to A_3)$ – MP en 3 y 4.
6. $(A_1\to A_2)\to(A_1\to A_3)$ – MP en 1 y 5.
7. $A_1\to A_3$ – MP en 2 y 6.


ISSN 2250-4494 – web: http://jornadasfilo.fahce.unlp.edu.ar

Derivación esquemática corolario b):

1. $(A_1 \to (A_2 \to A_3)) \to ((A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3))$ – Instancia del Axioma 2.
2. $A_1 \to (A_2 \to A_3)$ – Forma de enunciado ya derivada.
3. $A_2$ - Forma de enunciado ya derivada.
4. $A_2 \to (A_1 \to A_2)$ - Instancia del Axioma 1.
5. $A_1 \to A_2$ – MP en 3 y 4.
6. $(A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3)$ – MP en 1 y 2.
7. $A_1 \to A_3$ – MP en 5 y 6.

**Ejercicio 4:**

1- (¬A→¬¬A)→((¬A→¬A)→A) - Axioma 3 donde B/A, A/¬A

2- ¬A→¬A - Lema 1.8

3- ((¬A→¬¬A)→((¬A→¬A)→A))→(((¬A→¬¬A)→(¬A→¬A))→((¬A→¬¬A)→A)) Axioma 2 donde A/¬A → ¬¬A , B/¬A → ¬A , C/A.

4- ((¬A→¬¬A)→(¬A→¬A))→((¬A→¬¬A)→A) - MP en 1 y 3

5- (¬A→¬A)→((¬A→¬¬A)→(¬A→¬A)) - Axioma 1 donde A/¬A→¬A, B/¬A→ ¬¬A.

6- (¬A→¬¬A)→(¬A→¬A) - MP en 2 y 5.

7- (¬A→¬¬A)→A - MP en 4 y 6.

8- ¬¬A→(¬A→¬¬A) - Axioma 1 donde A/¬¬A , B/¬A

9- (¬¬A→((¬A→¬¬A)→A))→((¬¬A→(¬A→¬¬A))→(¬¬A→A)) Axioma 2 donde A/¬¬A , B/¬A→¬¬A , C/A.

10- ((¬A→¬¬A)→A)→(¬¬A→((¬A→¬¬A)→A)) - Axioma 1 donde A/(¬A→¬¬A)→A , B/¬¬A.

11- ¬¬A→((¬A→¬¬A)→A) - MP en 7 y 10.

12 - (¬¬A→(¬A→¬¬A))→(¬¬A→A) - MP en 9 y 11.

13- ¬¬A→A - MP en 8 y 12.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Corcorán, John and Idris Samawi Hamid, "Schema", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2022 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2022/entries/schema/>.

von Plato, J. (2013). *Elements of logical reasoning*. Reino Unido: Cambridge University Press.

--- "The Development of ProofTheory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2018/entries/proof-theory-development/>.

Łukasiewicz, J. (1957). *Aristotle's syllogistic: form the standpoint of modern formal logic* (2nd ed.). Londres: Oxford University Press.

Mendelson, E. (2015). *Introduction to Mathematical Logic* (6th ed.). Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/b18519


ISSN 2250-4494 – web: http://jornadasfilo.fahce.unlp.edu.ar